Biológiai jelenségeket modellező késleltetett differenciál- és differenciaegyenletek vizsgálata

Doktori értekezés tézisei

Garab Ábel

Témavezető:

Dr. Krisztin Tibor
egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2014

1. Bevezetés

A disszertációban neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciál- és differenciaegyenletekkel, valamint egy diszkrét idejű késleltetett populációdinamikai modellel foglalkozunk. A dolgozat során periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére, valamint egyensúlyi helyzetek globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételeket a paraméterek függvényében. Az adott tételek hozzájárulnak a modellek globális dinamikájának jobb megértéséhez.

Az értekezés a szerző [1–4] publikációin alapszik. A tézisfüzetben található jelölések és számozások megegyeznek a disszertációban használtakkal.

2. Neuronhálózatok modellezése

A fejezetben az alábbi, neuronhálózatokat modellező késleltetett differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0(t) &= -\alpha x^0(t) + f_\beta(x^1(t)), \\ &\ \vdots \\ \dot{x}^{n-1}(t) &= -\alpha x^{n-1}(t) + f_\beta(x^n(t)), \\ \dot{x}^n(t) &= -\alpha x^n(t) + \delta f_\beta(x^0(t-\tau)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol x^j a j-edik neuron elektromos potenciálját jelöli, valamint $\alpha > 0$, $\tau > 0$ paraméterek, és $\delta \in \{-1, 1\}$. A δ előjele szerint megkülönböztetünk pozitív, illetve negatív visszacsatolást. A τ késleltetés itt az elektromos jel terjedésének véges sebességéből adódik. Az $f_\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ visszacsatolási függvényre vagy $f_\beta = \beta f_0$, ahol $f_0(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$ vagy $f_\beta \in S$, azaz f_β folytonosan differenciálható, páratlan, szigorúan monoton növekvő, továbbá $f'_\beta(0) = \beta$, és $\xi \mapsto \xi f'(\xi)/f(\xi)$ szigorúan monoton csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon. Megjegyezzük, hogy az

$$\dot{x}^j(t) = -\alpha x^i(t) \pm f_\beta(x^{i+1}(t - \tau_i)), \quad i = \{0, 1, \ldots, n\},$$

alakú egyenletek egy egyszerű transzformációval a (2.4) alakra hozhatók, ahol az indexek modulo $(n+1)$ értendők.

Az előbbi visszacsatolási függvények osztálya a leggyakrabban használt visszacsatolás bizonyos mesterséges neuronhálózatok, úgynevezett celluláris neurális hálók elméletében, amelyek fontos szerepet játszanak a mesterséges intelligencia (például képfeldolgozás, optimalizálási problémák) kutatásában. Ezekben a modellekben a neuronok (cellák) egy d dimenziós rács rácspontjaiban helyezkednek el és a szomszédos rácspontokon lévő neuronok vannak összeköttetésben (a széleken valamilyen peremfeltétellel). A fenti modell egy egydimenziós rácson elhelyezett celluláris neurális modellnek felel meg, periodikus peremfeltétellel. Erre a visszacsatolásra úgy is fogunk hivatkozni, mint a „szakaszonként lineáris eset”.

Az utóbbi, úgynevezett szigmoid típusú visszacsatolások a (valódi) idegsejt-hálózatok modellezésében játszanak fontos szerepet. Ezen függvényosztályba tartoznak a gyakran alkalmazott tanh és arctg függvények is.

A fejezetben a fenti egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldásaival foglalkozunk, amelyek kiemelt fontossággal bírnak a neuronhálózatok elméletében. A szakaszonként lineáris visszacsatolás esetében technikai nehézséget jelent, hogy f_0 nem mindenhol differenciálható és nem szigorúan monoton, így a megoldásoperátor nem sima és nem injektív. Ennek folyományaként a Mallet-Paret- és Sell-féle [13, 14] Poincaré–Bendixson-típusú tétel és az ehhez köthető technikák közül sok nem alkalmazható közvetlenül.

Előkészületek

A (2.4) egyenletrendszer esetén a természetes fázistér a

$$\mathbb{K}_\tau = \mathbb{K}_{\tau,n} = [-\tau, 0] \cup \{1, 2, \ldots, n\}$$

halmazon értelmezett folytonos valós függvények supremum-normával ellátott $C(\mathbb{K}_\tau) = C(\mathbb{K}_\tau, \mathbb{R})$ Banach-tere. Használni fogjuk a $\tau = 1$ esetben a $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1$ jelölést.

2.7. Definíció. Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor az $x = \left(x^0, \ldots, x^n\right)$ függvény megoldása a (2.4) késleltetett differenciálegyenlet-rendszernek a (t_0, ∞) intervallumon, ha $x^0 \in C([t_0 - \tau, \infty), \mathbb{R})$, $x^i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ és x^i folytonosan differenciálható a (t_0, ∞) intervallumon bármely $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ esetén, valamint x kielégíti a (2.4) egyenletrendszert minden $t > t_0$ esetén. Azt mondjuk, hogy $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ megoldása a (2.4) rendszernek $\mathbb{R}$-en, ha megoldása annak bármely (t_0, ∞) intervallumon.

Tegyük fel, hogy x megoldása a (2.4) egyenletrendszernek a (t_0, ∞) intervallumon. Ekkor bármely $t \geq t_0$ esetén $x_t \in C(\mathbb{K}_\tau)$ legyen a következő formula által definiált:

$$x_t(\theta) = \begin{cases} x^0(t + \theta), & \text{ha } \theta \in [-\tau, 0], \\ x^\theta(t), & \text{ha } \theta \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

A lépések módszerével egyszerűen igazolható, hogy tetszőleges $\varphi \in C(\mathbb{K}_\tau)$ esetén létezik egyetlen x megoldása a (2.4) egyenletrendszernek a $(0, \infty)$ intervallumon, melyre $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$ tetszőleges $\theta \in \mathbb{K}_\tau$ esetén.

Mallet-Paret és Sell [14] cikkét követve definiáljuk a következő diszkrét Ljapunov-függvényeket, melyek segítségével – többek között – kategorizálhatjuk a (2.4) rendszer periodikus megoldásait.

$$V^+_{\mathbb{K}_\tau} \colon C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\} \to \{0, 2, 4, \ldots, \infty\}, \quad V^-_{\mathbb{K}_\tau} \colon C(\mathbb{K}_\tau) \setminus \{0\} \to \{1, 3, 5, \ldots, \infty\},$$

$$V^+_{\mathbb{K}_\tau}(\varphi) = \begin{cases} \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau), & \text{ha } \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páros vagy végtelen}, \\ \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) + 1, & \text{ha } \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páratlan}, \end{cases}$$

$$V^-_{\mathbb{K}_\tau}(\varphi) = \begin{cases} \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau), & \text{ha } \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páratlan vagy végtelen}, \\ \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) + 1, & \text{ha } \mathrm{sc}(\varphi, \mathbb{K}_\tau) \text{ páros}, \end{cases}$$

ahol $\mathrm{sc}(\varphi, H)$ a φ függvény előjelváltásainak számát adja meg értelmezési tartományának H részhalmazán. Az $n = 0$ esetben használjuk a rövidebb $V_\tau^\pm$ jelölést.

Legyen $V = V_{\mathbb{K}_\tau}^\pm$ attól függően, hogy a visszacsatolás pozitív vagy negatív. Ekkor Mallet-Paret és Sell [14] eredményei szerint, ha $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ periodikus megoldása a (2.4) egyenletnek, akkor a $V(x_t)$ értéke véges és állandó bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ezt kihasználva, periodikus megoldások esetén az alsó indexet sokszor elhagyjuk, és csak $V(x)$-et írunk.

Gopalsamy és He [7] eredményéből következik, hogy $\beta < \alpha$ esetén a (2.4) egyenletrendszer minden megoldása – az egyetlen – egyensúlyi helyzethez tart. A gondolatmenetüket felhasználva egyszerűen igazolható, hogy $\alpha = \beta$ esetén nincs az egyenletrendszernek nemkonstans periodikus megoldása, így kapjuk az alábbi lemmát.

2.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $0 < \beta \leq \alpha$. *Ekkor a* (2.4) *egyenletrendszernek nincsen nemkonstans periodikus megoldása.*

A fenti lemma értelmében a periodikus megoldások vizsgálata esetén elegendő a $\beta > \alpha$ esetre szorítkoznunk.

Periodikus pályák száma és jellemzése egy egyenlet esetén

A 2.4. részben a (2.4) egyenletrendszer periodikus megoldásait vizsgáljuk az $n = 0$ esetben, vagyis az

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) \pm f_\beta(x(t-\tau)), \tag{2.15}$$

egyenletet tanulmányozzuk. Ekkor a szigmoid esetben a globális attraktorról egy nagyon részletes kép áll rendelkezésre Krisztin, Walther és Wu [11] monográfiájának, valamint [5, 8–10] cikkeknek köszönhetően. Speciálisan, ismertek a periodikus pályák létezésére és egyértelműségére vonatkozó szükséges és elegendő feltételek (α, β és τ függvényében). Ebben a részben ezen eredmények analogonjait bizonyítjuk a szakaszonként lineáris típusú visszacsatolásra. Természetesen adódik a gondolat, hogy ezt a szakaszonként lineáris függvényt közelítsük a sima függvényosztályban lévő függvényekkel, majd az azokra vonatkozó eredményekből vonjunk le következtetéseket. A globális attraktor azonban csak alulról félig folytonos, így ez a megközelítés nem alkalmas arra, hogy unicitási vagy nemlétezési eredményeket bizonyítsunk vele.

A rész eredményeit a 2.27. Tétel foglalja össze. Ennek bizonyítása több lépésen keresztül történik. Először több technikai jellegű segédállítást bizonyítunk, amiket itt nem részletezünk, majd külön bizonyítjuk a tétel nemlétezésre, illetve unicitásra vonatkozó állításait. A következő definíciónak és az azt követő két tételnek fontos szerepe van az egész fejezet során.

2.19. Definíció. Legyen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható, periodikus függvény, T_x minimális periódussal. Nevezzük az $X\colon [0, T_x] \ni t \mapsto (x(t), \dot{x}(t)) \in \mathbb{R}^2$ görbét az x függvény D-trajektóriájának.

Megmutatható, hogy ha x egy nemkonstans periodikus megoldása a (2.15) egyenletnek (bármelyik típusú visszacsatolás esetén), akkor X egy egyszerű zárt síkgörbe, mely az origót a belsejében tartalmazza. Jelölje X képhalmazát $|X|$. Ennek komplementere egy korlátos és egy nem korlátos, összefüggő síkbeli halmazból áll, melyeket jelölje rendre $\mathrm{int}(X)$, valamint $\mathrm{ext}(X)$. Az alábbi tétel lényegében azt állítja, hogy egy periodikus megoldásnak annál nagyobb a D-trajektóriája, minél nagyobb a késleltetés az egyenletben.

2.25. Tétel (Garab, Krisztin [4]; Garab [3]). *Legyenek α, β, f_β, valamint τ_1, τ_2 rögzítettek, és $0 < \tau_1 < \tau_2$. Legyenek továbbá x_1 és x_2 egyaránt a* (2.15), $\tau = \tau_i$, $i \in \{1, 2\}$ *késleltetésű egyenleteknek nemkonstans periodikus megoldásai, X_i pedig jelölje az x_i D-trajektóriáját. Jelölje továbbá ε a $+$ vagy a $-$ szimbólum egyikét, aszerint, hogy a visszacsatolás pozitív vagy negatív. Ekkor, ha $V^{\varepsilon}_{\tau_1}(x_1) = V^{\varepsilon}_{\tau_2}(x_2)$, akkor*

$$|X_2| \subset \mathrm{ext}(X_1) \cup |X_1| \quad \textit{és} \quad |X_2| \cap \mathrm{ext}(X_1) \neq \emptyset.$$

A szigmoid esetben Krisztin és Walther [10] eredményeiből, a szakaszonként lineáris esetben pedig a periodikus megoldások unicitására vonatkozó – az értekezésben bizonyított – állításoknak köszönhetően tudjuk, hogy ha létezik $V^{+}_{\tau}(x) = 2$ típusú, úgynevezett lassan oszcilláló periodikus megoldás, akkor az rögzített paraméterek mellett és időeltolástól eltekintve egyértelműen meghatározott (lásd 2.27. Tételt), így definiálhatjuk annak periódusát mint a késleltetés függvényét. A periódusfüggvényről szóló alábbi tétel fontos szerepet játszik a (2.15) egyenlet periodikus megoldásainak egzisztenciatételében, valamint a (2.4) egyenletrendszer periodikus megoldásainak vizsgálatában.

2.26. Tétel (Garab, Krisztin [4]; Garab [3]). *Jelölje T a* (2.15) *egyenlet periódusfüggvényét rögzített $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ paraméterek mellett. Tegyük fel, hogy τ_1 és τ_2 a T értelmezési tartományából valók, valamint hogy $\tau_1 < \tau_2$. Ekkor*

$$0 \leq T(\tau_2) - T(\tau_1) < 2(\tau_2 - \tau_1).$$

A következő tétel a fejezet egyik fő eredménye, amely összefoglalja a (2.15) egyenlet periodikus megoldásainak létezésére, nemlétezésére és unicitására vonatkozó állításokat az $f_\beta = \beta f_0$, szakaszonként lineáris visszacsatolású esetre.

2.27. Tétel (Garab [3]). *Legyenek $\alpha, \beta, \tau > 0$, $f_\beta = \beta f_0$ és $k \geq 1$ egész rögzítettek, valamint*

$$\nu = \nu(\alpha, \beta, \tau) = \tau\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \arccos\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ekkor a következő állítások teljesülnek.

(i) Ha a visszacsatolás pozitív, akkor a (2.15) *egyenletnek pontosan akkor létezik periodikus x megoldása, amelyre $V^{+}_{\tau}(x) = 2k$, ha $\beta > \alpha$ és $\nu \geq 2k\pi$ fennáll. $V^{+}_{\tau} = 0$ típusú nemkonstans periodikus megoldások nem léteznek.*

a) Ha $\nu > 2k\pi$, akkor – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyetlen ilyen típusú megoldás létezik.

b) Ha $\nu = 2k\pi$, akkor pontosan az $x(t) = A\cos(t\sqrt{\beta^2-\alpha^2}+\Delta)$ alakú függvények lesznek a (2.15) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásai, ahol $\Delta \in \mathbb{R}$ és $A \in (0,1]$ tetszőlegesen választható. Ekkor $V_\tau^+(x) = 2k$ szükségszerűen teljesül.

(ii) Ha a visszacsatolás negatív, akkor a (2.15) egyenletnek pontosan akkor létezik periodikus x megoldása, amelyre $V_\tau^-(x) = 2k-1$, ha $\beta > \alpha$ és $\nu \geq (2k-1)\pi$ fennáll.

a) Ha $\nu > (2k-1)\pi$, akkor – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyetlen ilyen típusú megoldás létezik.

b) Ha $\nu = (2k-1)\pi$, akkor pontosan az $x(t) = A\cos(t\sqrt{\beta^2-\alpha^2}+\Delta)$ alakú függvények lesznek a (2.15) egyenlet nemkonstans periodikus megoldásai, ahol $\Delta \in \mathbb{R}$ és $A \in (0,1]$ tetszőlegesen választható. Ekkor $V_\tau^-(x) = 2k-1$ szükségszerűen teljesül.

A bizonyítás több részből áll. A lassan oszcilláló periodikus megoldások létezésére vonatkozó feltétel elegendőségét Vas bizonyította [20]. Ezt, valamint a 2.26. Tételt felhasználva tudjuk bizonyítani a tétel negatív visszacsatolásra és a gyorsabb oszcillációkra vonatkozó létezési állításait. A tétel unicitásra és nemlétezésre vonatkozó részeinek igazolása a Cao–Krisztin–Walther-féle technika alkalmazásával, annak alkalmas módosításával történik, és a D-trajektóriák vizsgálatán alapszik.

Egy speciális gyűrűszerű rendszer periodikus megoldásai

A 2.5. részben a (2.4) egyenletrendszer nemkonstans periodikus megoldásaival foglalkozunk az $n \geq 1$ esetben, mindkét típusú visszacsatolás mellett. Megjegyezzük, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\tau = 1$. A rész fő eredményei, hogy szükséges és elegendő feltételeket adunk a relatíve gyorsabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozóan, valamint elegendő feltételeket fogalmazunk meg a lassabban oszcilláló periodikus megoldások létezésére illetve nemlétezésére. Ezeket a 2.34. és a 2.35. Tételekben foglaljuk össze.

Yi, Chen és Wu [21] gondolatmenetét követve, és azt helyenként alkalmasan módosítva jutunk a következő tételhez, ami a (2.4) egyenletrendszer periodikus megoldásai és a (2.15) egyenlet lassan oszcilláló periodikus megoldásai közti kapcsolatot tárja fel.

2.32. Tétel (Garab, Krisztin [4]; Garab [3]). *Jelölje T a pozitív visszacsatolású (2.15) egyenlet periódusfüggvényét. Ekkor pozitív visszacsatolás esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a (2.4) egyenletrendszer $V^+_{\mathbb{K}_\tau} = 2k \geq 2$ típusú periodikus megoldásai és az alábbi két görbe metszéspontjai között:*

$$\mathrm{dom}T \ni \gamma \mapsto (\gamma, T(\gamma)), \quad \textit{illetve} \quad \mathbb{R} \ni \zeta \mapsto \left(\frac{(n-k+1)\zeta+1}{n+1}, \zeta\right).$$

Analóg módon, negatív visszacsatolás esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a (2.4) *egyenletrendszer* $V^-_{\mathbb{K}_\tau} = 2k-1$ *típusú periodikus megoldásai és az alábbi két görbe metszéspontjai között:*

$$\mathrm{dom} T \ni \gamma \mapsto (\gamma, T(\gamma)), \quad \textit{illetve} \quad \mathbb{R} \ni \zeta \mapsto \left(\frac{(n-k+3/2)\zeta+1}{n+1}, \zeta \right).$$

Ennek, valamint a 2.26. Tételnek a folyományaként kapjuk a fejezet másik fő eredményét, a 2.34. és a 2.35. Tételeket. Az alábbi tétel Yi, Chen és Wu [6, 21] eredményeinek egy általánosítását adja.

2.34. Tétel (Garab, Krisztin [4]; Garab [3]). *Legyen* $\tau = 1$, *és vezessük be a következő jelölést:*

$$\nu_n(\alpha, \beta) = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + (n+1) \arccos \frac{\alpha}{\beta}.$$

Tegyük fel, hogy $f_\beta \in S$ *és* $\delta = 1$. *Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

- *(i)* $\mathbb{N} \ni k \geq \frac{n+1}{2}$ *esetén a* (2.4) *egyenletrendszernek pontosan akkor létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre* $V^+_{\mathbb{K}}(x) = 2k$ *teljesül, ha* $\nu_n(\alpha, \beta) > 2k\pi$. *Ekkor ez a megoldás – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyértelmű.*
- *(ii)* $\mathbb{N} \ni k < \frac{n+1}{2}$ *esetén, ha* $\nu_n(\alpha, \beta) > 2k\pi$ *teljesül, akkor a* (2.4) *egyenletrendszernek létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre* $V^+_{\mathbb{K}}(x) = 2k$.
- *(iii)* $V^+_{\mathbb{K}} = 0$ *típusú nemkonstans periodikus megoldások nem léteznek.*

Analóg módon, ha $f_\beta \in S$ *és* $\delta = -1$, *akkor az alábbiak teljesülnek.*

- *(iv)* $\mathbb{N} \ni k \geq \frac{n+2}{2}$ *esetén a* (2.4) *egyenletrendszernek pontosan akkor létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre* $V^-_{\mathbb{K}}(x) = 2k-1$ *teljesül, ha* $\nu_n(\alpha, \beta) > (2k-1)\pi$. *Ekkor ez a megoldás – az időváltozó eltolásától eltekintve – egyértelmű.*
- *(v)* $\mathbb{N} \ni k < \frac{n+2}{2}$ *esetén, ha* $\nu_n(\alpha, \beta) > (2k-1)\pi$ *teljesül, akkor a* (2.4) *egyenletrendszernek létezik olyan periodikus x megoldása, amelyre* $V^-_{\mathbb{K}}(x) = 2k-1$.

Az $f_\beta = \beta f_0$ *esetben a fenti feltételekben szereplő „>" relációk „≥" relációkra cserélendők. Ekkor egyenlőség esetén a megoldások az időváltozó eltolásától és konstans szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározottak.*

Vegyük észre, hogy a fenti tétel az $n = 0$ esetben a 2.27. Tételt, illetve a sima esetre vonatkozó analóg állításokat adja, továbbá pozitív visszacsatolás és $n = 1$ esetén az összes típusú periodikus megoldás létezésére és egyértelműségére szükséges és elegendő feltételt ad. A 2.26. Tétel és Nussbaum [17] eredményeinek az alábbi egyszerű következményével egészítjük ki az előző tétel állításait.

2.35. Tétel. *Legyen* $\tau = 1$, *és vezessük be a következő jelölést:*

$$\tau^* = \frac{2\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Ekkor a következő állítások teljesülnek.

(i) Tegyük fel, hogy $\frac{n+1}{4} < k < \frac{n+1}{2}$*,* $\delta = 1$*, valamint hogy* $\tau^*(4k-n-1) \geq 3$*. Ekkor a* (2.4) *egyenletrendszernek nem létezik* $V_{\mathbb{K}}^{+} = 2k$ *típusú periodikus megoldása.*

(ii) Tegyük fel, hogy $\frac{n+3}{4} < k < \frac{n+2}{2}$*,* $\delta = -1$*, valamint hogy* $\tau^*(4k-n-3) \geq 3$*. Ekkor a* (2.4) *egyenletrendszernek nem létezik* $V_{\mathbb{K}}^{-} = 2k-1$ *típusú periodikus megoldása.*

Yi, Chen és Wu [21] dolgozatukban az általuk vizsgált – pozitív visszacsatolású, sima – esetre megfogalmaztak egy sejtést, miszerint 2.34. Tétel (i) állítása igaz bármely $k \geq 1$ esetén. A 2.32. Tételt felhasználva könnyen megmutatható, hogy ennek igazolásához – a pozitív és negatív visszacsatolású esetre és mindkét típusú visszacsatolásra egyaránt – elegendő lenne belátnunk az alábbi sejtésünket, melyet számítógépes szimulációkkal alá lehet támasztani.

2.36. Sejtés (Garab, Krisztin [4]; Garab [3])**.** *Jelölje T a pozitív visszacsatolású* (2.15) *egyenlet periódusfüggvényét. Ekkor a* $\operatorname{dom}T \ni \tau \mapsto T(\tau)/\tau$ *függvény monoton nemnövekvő.*

3. Másodrendű differenciaegyenletek globális stabilitásvizsgálata

A fejezetben két másodrendű, paraméteres differenciaegyenlet egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására adunk szükséges és elegendő feltételt a paraméterek függvényében. A 3.1. részben vizsgálatunk tárgya az alábbi differenciaegyenlet:

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha \tanh(x_{n-1}),$$

ahol $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$. A fenti egyenletre gondolhatunk úgy, mint egy diszkrét idejű neuronmodellre, ugyanakkor egy egyszerű transzformációjával egy Clark-típusú populációdinamikai modellt nyerhetünk.

A 3.2. részben az alábbi késleltetett Ricker-típusú populációdinamikai modellt vizsgáljuk:

$$x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_{n-d}},$$

ahol x_n egy adott területen élő populáció méretét jelöli az n-edik időpillanatban, az α pozitív paraméter, és $d > 0$ az önszabályozó rendszer késleltetett visszacsatolását fejezi ki. A modellt Ricker állította fel 1954-ben [18] (akkor még késleltetés nélkül) bálnapopulációk dinamikájának modellezésére, és azóta az egyik legelterjedtebb populációdinamikai modell.

A globális aszimptotikus stabilitás bizonyítása a két egyenlet esetében hasonló módon történik. Különböző, számítógéppel végzett megbízható számításokat ötvözünk analitikus eszközökkel. A bizonyítás nagy vonalakban a következő lépésekből áll. Először megkonstruáljuk az egyensúlyi helyzet egy paramétertől független környezetét, amely az egyensúlyi helyzet vonzástartományához tartozik minden olyan paraméterérték esetén, amire a lokális aszimptotikus stabilitás fennáll. Ezt a kritikus paraméterek közelében mindkét modell esetén a (rezonáns) Neimark–Sacker-normálalak vizsgálatával tesszük. Tudomásunk szerint a Neimark–Sacker-bifurkáció normálformájának ilyen célú felhasználása újdonság az irodalomban. Ezután megbízható számítógéppel segített módszerekkel megmutatjuk, hogy minden trajektória belép ebbe a kis környezetbe, ami igazolja a globális aszimptotikus stabilitást minden olyan esetben, amikor a lokális aszimptotikus stabilitás fennáll. A bizonyítás utóbbi része intervallumaritmetika és gráfreprezentációs eljárások segítségével történik és Bartha Ferenc munkájának eredménye.

A „számítógéppel segített” itt azt jelenti, hogy a számításainkat és egyes becsléseinket egy számítógépes program segítségével végezzük, amely megbízható eredményeket ad, azaz minden lehetséges numerikus hiba kontrollálva van. Ez lehetővé teszi, hogy a kapott kimenetek (eredmények) segítségével matematikai tételeket bizonyítsunk.

Egy diszkrét idejű neuronmodell

A 3.1. részben az

$$x_{n+1} = mx_n - \alpha\varphi(x_{n-1}) \tag{3.1}$$

késleltetett differenciaegyenletet globális viselkedését tanulmányozzuk, ahol $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$, valamint φ egy korlátos, folytonos, valós függvény, amely eleget tesz az alábbi Yorke-típusú feltételnek:

$$\min\{0, x\} < \varphi(x) < \max\{0, x\}, \quad \text{ha} \quad x \neq 0. \tag{3.2}$$

A (3.1) egyenlet helyett a továbbiakban az alábbi vele ekvivalens kétdimenziós leképezést vizsgáljuk:

$$F_{\alpha,m}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_{\alpha,m}\colon (x, y) \mapsto (y, my - \alpha\varphi(x)). \tag{3.3}$$

A rész fő eredménye, hogy szükséges és elegendő feltételt adunk a (3.3) leképezés $(0, 0)$ fixpontjának globális aszimptotikus stabilitására abban az esetben, ha $\varphi(x) \equiv \tanh(x)$, ami a neurális modellek körében az egyik leggyakrabban használt visszacsatolási függvény.

A számítógéppel segített gráfreprezentációs módszerekkel csak a fázistér egy korlátos tartományát tudjuk vizsgálni. A globális dinamika elemi módszerekkel történő vizsgálata során kapott – itt nem részletezett – eredményekből az alábbi következményt nyerjük.

3.8. Következmény (Bartha, Garab [1]). *Tegyük fel, hogy* $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, *valamint* M *a* φ *függvény szigorú felső korlátja. Ekkor a*

$$\left[-\tfrac{2M}{\max\{m,1-m\}}, \tfrac{2M}{\max\{m,1-m\}}\right]^2 \subset \mathbb{R}^2$$

korlátos halmaz tartalmaz egy kompakt halmazt, amely pozitív invariáns és globálisan attraktív a (3.3) *leképezésre nézve.*

Ez lehetővé teszi a fázistér fenti korlátos tartományra való megszorítását a hosszú távú viselkedés tanulmányozása során.

Ezután a $\varphi(x) \equiv \tanh(x)$ esetre szorítkozunk, tehát az

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = F_{\alpha,m}(x,y) = (y, my - \alpha \tanh(x)) \tag{3.5}$$

leképezést vizsgáljuk. Használni fogjuk az F^k jelölést az F leképezés k-adik iteráltjára. Könnyen belátható, hogy a triviális fixpont csak akkor lehet globálisan aszimptotikusan stabil, ha

$$(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m) = [|m| - 1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}.$$

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elegendő is. A tanh függvény páratlansága miatt elég az $m \geq 0$ esettel foglalkoznunk. Nenya és szerzőtársainak [15, 16] általános tételei garantálják, hogy a (3.5) leképezés triviális egyensúlyi helyzete globálisan aszimptotikusan stabil, ha $\alpha \leq \frac{m^2+1}{|m|+1}$ és $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$. Tudomásunk szerint ez az eddigi legjobb eredmény a (3.5) leképezés globális stabilitására vonatkozóan. A fejezet egyik fő eredménye az alábbi tétel, amely szükséges és elegendő feltételt ad a (3.5) leképezés triviális egyensúlyi helyzetének globális aszimptotikus stabilitására.

3.11. Tétel (Bartha, Garab [1]). *A (3.5) leképezés $(0,0)$ fixpontja pontosan akkor globálisan aszimptotikusan stabil, ha $(\alpha, m) \in \mathcal{R}(m)$.*

Ennek bizonyítása érdekében meg kell konstruálnunk az egyensúlyi helyzet egy kis környezetét, amely annak vonzástartományához tartozik.

3.12. Tétel (Bartha, Garab [1]). *Legyen $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ és $m \in [0, 1]$. Ekkor, ha*

$$\varepsilon(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{27}{800}} \sqrt{1 - \sqrt{\alpha}},$$

akkor tetszőleges $(x, y) \in \big(-\varepsilon(\alpha), \varepsilon(\alpha)\big)^2$ esetén $\lim_{k\to\infty} F^k(x, y) = (0, 0)$ teljesül.

A fenti tétel a linearizált egyenlet vizsgálatával igazolható. Ahogy az α paraméter tart a kritikus $\alpha = 1$ értékhez, a fenti környezet mérete nullához tart, így ha α közel van az 1-hez, akkor nem lehet megmutatni megbízható intervallum-aritmetikai módszerekkel, hogy minden trajektória belép a kapott környezetbe. Ezért szükségünk van egy másfajta megközelítésre. A következő tételben megadunk egy környezetet, mely az egyensúlyi helyzet vonzástartományában van és amelynek mérete független a paraméterektől.

3.13. Tétel (Bartha, Garab [1]). *Legyen $\alpha \in [0{,}98,\ 1]$ és $m \in [0, 1]$. Ekkor, ha*

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{6},$$

akkor tetszőleges $(x, y) \in \big(-\varepsilon(\alpha), \varepsilon(\alpha)\big)^2$ esetén $\lim_{k\to\infty} F^k(x, y) = (0, 0)$ teljesül.

Az $(\alpha, m) = (1, 0)$ paraméterek esetén erős 1:4 rezonancia lép fel, ezért a fenti tétel bizonyítása a rezonáns Neimark–Sacker-normálalak segítségével történik. A bizonyításban egyenletes becsléseket kell adnunk a normálalakban szereplő együtthatókra és a maradéktagra egyaránt.

Legyen most $\varepsilon(\alpha)$ az $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 0{,}98\right)$ esetben a 3.12. Tétel által definiált, az $\alpha \in [0{,}98, 1]$ esetben a 3.13. Tétel által definiált. Ekkor megbízható számítógépes módszerek segítségével megmutatható, hogy bármely $(\alpha, m) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [-1, 1]$ és $(x, y) \in [-4, 4]^2$ esetén létezik $k \geq 0$ egész, amelyre $F^k(x, y) \in (-\varepsilon(\alpha), \varepsilon(\alpha))^2$ teljesül. Ezt összevetve a 3.8. Következménnyel, a 3.12. és 3.13. Tételekkel, valamint Nenya és szerzőtársai eredményeivel a 3.11. Tétel bizonyítását nyerjük.

Egy Ricker-féle populációdinamikai modell

Levin és May 1976-ban megfogalmazott egy sejtést az $x_{n+1} = x_n e^{\alpha - x_{n-d}}$ modellt is magába foglaló késleltetett differenciaegyenletek egy osztályára, miszerint a pozitív egyensúlyi helyzet lokális aszimptotikus stabilitása maga után vonja annak globális attraktivitását (lásd [12]). Mi a $d = 1$ esettel foglalkozunk, tehát vizsgálatunk tárgya az alábbi leképezés:

$$F_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (y, ye^{\alpha - x}) \in \mathbb{R}^2,$$

ahol $\alpha > 0$ paraméter. Ahogy a korábbiakban is, jelölje F_α^k az F_α függvény k-adik iteráltját. Az F_α leképezésnek két fixpontja van: $(0, 0)$, valamint (α, α). Levin és May sejtése szerint a fenti leképezés (α, α) fixpontja globálisan aszimptotikusan stabil minden $\alpha \in (0, 1]$ esetén, abban az értelemben, hogy $\mathbb{R}_+^2$ a vonzástartományában van. Ezzel kapcsolatban az eddigi legjobb eredmény Tkachenko és Trofimchuk [19] általános tételéből következik, nevezetesen hogy $\alpha \in (0,\ 0{,}875)$ esetén a pozitív egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil. Az értekezés egyik fő eredménye az alábbi tétel, amelyben igazoljuk a sejtést a $d = 1$ esetben.

3.15. Tétel (Bartha, Garab, Krisztin [2]). *Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor az F_α leképezés (α, α) fixpontja lokálisan aszimptotikusan stabil és $F_\alpha^n(x, y) \to (\alpha, \alpha)$ bármely $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, amint $n \to \infty$.*

A bizonyítás az előző részben látottakhoz hasonlóan történik. Első lépésként megkonstruálunk minden $\alpha \in [0{,}875,\ 1]$ értékre egy kompakt, pozitív invariáns $S(\alpha)$ halmazt, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}$, amelyre $F^k(x, y) \in S(\alpha)$. Ezek után a következő két tétel segítségével (α értékétől függően) megadunk egy kis környezetet, amely a fixpont vonzástartományához tartozik.

3.18. Tétel (Bartha, Garab, Krisztin [2]). *Az*

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - \alpha| < \frac{1}{37}, |y - \alpha| < \frac{1}{37} \right\}$$

halmaz az F_α leképezés (α, α) fixpontjának vonzástartományában van bármely rögzített $\alpha \in [0{,}875,\ 1]$ paraméter esetén.

3.19. Tétel (Bartha, Garab, Krisztin [2]). *Az*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-\alpha| < \frac{1}{22}, |y-\alpha| < \frac{1}{22}\right\}$$

halmaz az F_α leképezés (α,α) fixpontjának vonzástartományában van bármely rögzített $\alpha \in [0{,}999,\ 1]$ paraméter esetén.

Itt rezonancia nem lép fel, így a fenti tételeket a nemrezonáns Neimark–Sacker-normálalak becslésének segítségével tudjuk megtenni. Jogosan adódik a kérdés, hogy miért nem elég a 3.18. Tételt bizonyítanunk. Ennek az az oka, hogy a kritikus $\alpha = 1$ paraméternél és annak közelében már nagyon lassú a konvergencia, így ha azt akarnánk megmutatni, hogy a trajektóriák belépnek az $(\alpha - 1/37, \alpha + 1/37)^2$ környezetbe, akkor a számítógéppel segített résznél a gráfreprezentáció tárolására az általunk használt számítógépklaszter 128 GB memóriája sem lenne elegendő.

A 3.15. Tétel bizonyítása azzal válik teljessé, hogy megbízható számítógépes módszerek segítségével megmutatjuk, hogy bármely $(x,y) \in S(\alpha)$ esetén létezik $k \geq 0$ egész, hogy $F_\alpha^k(x,y)$ a 3.18., illetve a 3.19. Tételek által definiált környezetbe esik.

Az értekezés alapját képező publikációk

[1] F. A. Bartha and Á. Garab. Necessary and sufficient condition for the global stability of a delayed discrete-time single neuron model. *J. Comput. Dyn.*, közlésre elfogadva.

[2] F. A. Bartha, Á. Garab, and T. Krisztin. Local stability implies global stability for the 2-dimensional ricker map. *J. Difference Equ. Appl.*, 19(12), 2043–2078, 2013.

[3] Á. Garab. Unique periodic orbits of a delay differential equation with piecewise linear feedback function. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(6), 2369–2387, 2013.

[4] Á. Garab and T. Krisztin. The period function of a delay differential equation and an application. *Period. Math. Hungar.*, 63(2), 173–190, 2011.

Hivatkozások

[5] Y. Cao. Uniqueness of periodic solution for differential delay equations. *J. Differential Equations*, 128(1), 46–57, 1996.

[6] Y. Chen, J. Wu, and T. Krisztin. Connecting orbits from synchronous periodic solutions in phase-locked periodic solutions in a delay differential system. *J. Differential Equations*, 163(1), 130–173, 2000.

[7] K. Gopalsamy and X. Z. He. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays. *Phys. D*, 76(4), 344–358, 1994.

[8] T. Krisztin. Periodic orbits and the global attractor for delayed monotone negative feedback. In *Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999)*, Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., pages 1–12, No. 15. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Szeged, 2000.

[9] T. Krisztin. Unstable sets of periodic orbits and the global attractor for delayed feedback. In *Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999)*, volume 29 of *Fields Inst. Commun.*, pages 267–296. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[10] T. Krisztin and H.-O. Walther. Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor. *J. Dynam. Differential Equations*, 13(1), 1–57, 2001.

[11] T. Krisztin, H.-O. Walther, and J. Wu. *Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback*, volume 11 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[12] S. A. Levin and R. M. May. A note on difference-delay equations. *Theoret. Population Biology*, 9(2), 178–187, 1976.

[13] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay. *J. Differential Equations*, 125(2), 441–489, 1996.

[14] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov functions. *J. Differential Equations*, 125(2), 385–440, 1996.

[15] O. Ī. Nenya. On the global stability of a nonlinear difference equation. *Nelīnīĭnī Koliv.*, 9(4), 525–534, 2006.

[16] O. Ī. Nenya, V. Ī. Tkachenko, and S. Ī. Trofimchuk. On the global stability of a nonlinear difference equation. *Nelīnīĭnī Koliv.*, 7(4), 487–494, 2004.

[17] R. D. Nussbaum. Circulant matrices and differential-delay equations. *J. Differential Equations*, 60(2), 201–217, 1985.

[18] W. E. Ricker. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 11(5), 559–623, 1954.

[19] V. Tkachenko and S. Trofimchuk. A global attractivity criterion for nonlinear non-autonomous difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2), 901–912, 2006.

[20] G. Vas. Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay. *Nonlinear Anal.*, 71(5-6), 2268–2277, 2009.

[21] T. Yi, Y. Chen, and J. Wu. Periodic solutions and the global attractor in a system of delay differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1), 24–63, 2010.